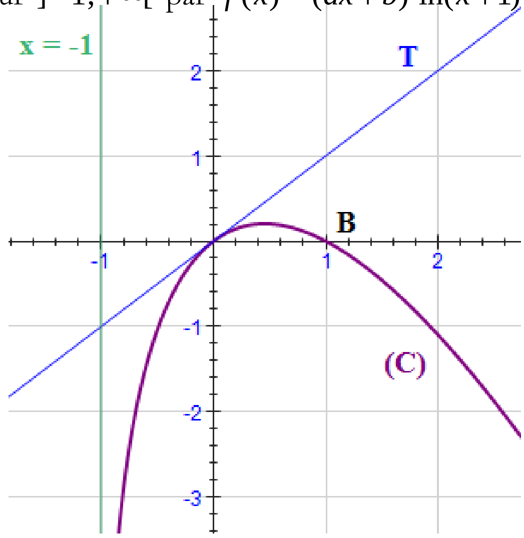
série n°11

Exercice N°1

1) La fonction *f* représentée ci-dessous par la courbe (C) est définie sur $]-1,+\infty[$ par $f(x)=(ax+b)\ln(x+1)$ où a et b sont deux constantes.
La courbe (C) passe par le point B(1,0) et admet à l'origine une tangente T d'équation $y = x$. Déterminer les réels a et b



2) Soit la fonction *F* définie sur $]-1,+\infty[$ par

$$F(x)=\frac{x^2}{4}-\frac{3x}{2}-\left(\frac{x^2}{2}-x-\frac{3}{2}\right)\ln(x+1)$$

Montrer que la fonction *F* est une primitive de *f* qui s'annule en 0.

Exercice N°2

L'espace ξ étant rapporté à un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$, on donne les points

$A(-1,-1,1)$, $B(3,2,-1)$ et $C(1,\frac{1}{2},1)$

1 /a) Donner les composantes du vecteur $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}$

b) Vérifier qu'une équation cartésienne du plan P défini par les points A, B et C est : $3x-4y-1=0$

2/ Soit m un réel. On considère l'ensemble S_m des points M(x,y,z) de ξ tels que :

$x^2+y^2+z^2-2mx-2(m+1)y+m^2+2m=0$

Montrer que S_m est une sphère dont on précisera, en fonction de m, le rayon R_m et les coordonné du centre I_m

3/a) Vérifier que $d(I_m,P)=\frac{|m+5|}{5}$

b) Etudier, suivant les valeurs de m, la position relative de S_m et P

c) Montrer que l'intersection de S_5 et P est un cercle dont on précisera le centre et le rayon

4/ Déterminer m pour que S_m passe par O

Exercice N°3

L'espace est rapporté d'un repère orthonormé direct $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$

On donne les points $A(1,0,0);B(0,0,1)$ et $C(1,-1,1)$

1/a)Déterminer : $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}$. Déduire que les points A, B et C détermine un plan P

b) Vérifier qu'une équation de P est $x+y+z-1=0$

2/ Soit S l'ensemble des points M(x,y,z) de l'espace tels que : $x^2+y^2+z^2-2x-2z+1=0$

a) Montrer que S est une sphère dont on précisera le centre I et le rayon R

b) Montrer que $S\cap P$ est le cercle circonscrit au triangle ABC

3/ a) Calculer le volume du tétraèdre IABC

b) Soit $\alpha\in\mathbb{R}$ et $M(\alpha,0,2-\alpha)$ un point de l'espace

Montrer que, lorsque α décrit $\mathbb{R}$, le volume du tétraèdre MABC reste constant

Exercice N°4

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $I =]0,+\infty[$ par $f(x) = \frac{1}{4}x^2 - 1 - 2\ln(x)$

On désigne par ζ_f sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(o,\vec{i},\vec{j})$

1/a) Montrer que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty$ Interpréter graphiquement ce résultat.

b) Montrer que la droite d'équation x = 0 est asymptote à ζ_f

c) Montrer que pour tout x de I, $f'(x) = \frac{(x-2)(x+2)}{2x}$ puis dresser le tableau de variation de f

2/a) Montrer que l'équation f(x)=0 admet exactement deux solutions α et β dans l'intervalle I et que $0.5 < \alpha < 0.7$ et $3.7 < \beta < 3.9$

b) Tracer ζ_f

3/ Montrer que la fonction F définie sur I par $F(x) = \frac{1}{12}x^3 + x - 2x\ln(x)$ est une primitive de f sur I

Exercice N°5

Chaque question ci-dessous comporte trois réponses possibles. Pour chacune de ces questions, une seule des réponses proposées est exacte. On demande de choisir cette réponse

1/ Soit P un plan dont une équation cartésienne est : $2x - z + 2 = 0$. Un vecteur normal de P est

a) $\vec{U}\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ b) $\vec{V}\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ c) $\vec{w}\begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

2/ Soit S une sphère d'équation cartésienne est : $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ et P le plan d'équation : $x + 1 = 0$

a) $S \cap P = \varnothing$ b) $S \cap P$ est un point c) $S \cap P$ est un cercle

3/ Pour x >0 $\ln(x + x^2)$ est égale à

a) $\ln(x) + \ln(x+1)$ b) $\ln(x^3)$ c) $\ln(3x)$

4/ La primitive sur $]0,+\infty[$ de la fonction $x \mapsto \frac{\ln x}{x}$, qui s'annule en 1 est

a) $x \mapsto \frac{1}{2}(\ln x)^2$ b) $x \mapsto 2\ln x$ c) $x \mapsto 2x\ln x$